

Zadanie 1. Niech

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, y^2 + z^2 = 2\}.$$

- Wykazać, że M jest rozmaitością jednowymiarową klasy C^∞ .
- Znaleźć przestrzeń styczną do M w punkcie $(1, 1, 1)$.
- Znaleźć kresy funkcji $f(x, y, z) = \ln(|x|) + yz$ na zbiorze

$$M \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq e^{2025}\}.$$

Rozwiązanie punktu (c).**I sposób:** Zauważmy, że dla $(x, y, z) \in M$ mamy:

$$\ln(|x|) + yz = \frac{1}{x} + \ln(|x|).$$

Powstaje pytanie: dla jakich $x \in \mathbb{R}$ istnieją y, z takie, że $(x, y, z) \in M$? Innymi słowy, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ układ równań

$$yz = \frac{1}{x}, \quad y^2 + z^2 = 2$$

ma rozwiązanie? Układ ten sprowadza się do:

$$(y+z)^2 = 2 + \frac{2}{x}, \quad (y-z)^2 = 2 - \frac{2}{x},$$

który ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy prawe strony powyższych równości spełniają nierówność $2 \pm \frac{2}{x} \geq 0$, czyli dla $|x| \geq 1$.

Zatem problem postawiony w punkcie (c) sprowadziliśmy do wyznaczenia kresów funkcji

$$g(x) = \frac{1}{x} + \ln(|x|)$$

na zbiorze $[-e^{2025}, -1] \cup [1, e^{2025}]$.Mamy $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, skąd $g'(x) = 0$ jedynie dla $x = 1$. Zatem funkcja g jest malejąca na $\mathbb{R}_-$ i rosnąca na $[1, +\infty)$.

Ponadto:

$$g(-1) = -1, \quad g(1) = 1, \quad g(e^{2025}) = e^{-2025} + 2025 > g(-e^{2025}) = 2025 - e^{-2025}.$$

Stąd:

$$\inf_{\tilde{M}} f = \min_{1 \leq |x| \leq e^{2025}} g(x) = -1, \quad \sup_{\tilde{M}} f = \max_{1 \leq |x| \leq e^{2025}} g(x) = 2025 + e^{-2025},$$

gdzie $\tilde{M} = \{(x, y, z) \in M : |x| \leq e^{2025}\}$.**II sposób:** Co prawda M nie jest zbiorem zwartym, ale $\tilde{M}$ już tak: jest ograniczony ($|y|, |z| \leq \sqrt{2}$ oraz $|x| \leq e^{2025}$) i domknięty (ponieważ M jest poziomicą funkcji ciągłej).Zatem $a = \inf_{\tilde{M}} f$ oraz $A := \sup_{\tilde{M}} f$ są wartościami funkcji f w pewnych punktach zbioru $\tilde{M}$. Niech $p \in \tilde{M}$ będzie punktem takim, że $f(p) = a$ lub $f(p) = A$, gdzie $p = (x_0, y_0, z_0)$. Możliwe są dwa przypadki:

- $|x_0| = e^{2025}$;
- Punkt p jest punktem lokalnego ekstremum funkcji $f|_M$, czyli istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^3$ taki, że $p \in U$ oraz: $f(q) \geq f(p)$ dla wszystkich $q \in M \cap U$ (gdy p jest punktem lokalnego minimum), lub $f(q) \leq f(p)$ dla wszystkich $q \in M \cap U$ (gdy p jest punktem lokalnego maksimum).

W pierwszym przypadku łatwo stwierdzić, że $f(p) = 2025 \pm e^{-2025}$. W drugim przypadku stosujemy twierdzenie o lokalnych ekstremach funkcji określonej na rozmaitości zanurzonej w $\mathbb{R}^n$ i wnioskujemy, że wówczas gradient funkcji f w punkcie p musi być kombinacją liniową gradientów funkcji definiujących M , czyli funkcji xyz oraz $y^2 + z^2$.

Stąd:

$$\det \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 0 & 2y & 2z \\ \frac{1}{x} & z & y \end{bmatrix} = 0.$$

To szybko prowadzi do rozwiązania $x = \pm 1$ i końcowej odpowiedzi.**III sposób:** Zbiór M można łatwo sparametryzować:

$$y = \sqrt{2} \cos \alpha, \quad z = \sqrt{2} \sin \alpha,$$

skąd:

$$x = \frac{1}{yz} = \frac{1}{2 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Należy zauważyć, że α nie jest dowolne, lecz $yz = \sin 2\alpha \neq 0$, skąd $\alpha \in T$, gdzie:

$$T := (0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

(Stąd łatwo widzimy, że M ma 4 składowe spójności.)

Mamy wyznaczyć kresy funkcji:

$$\ln \left(\left| \frac{1}{\sin 2\alpha} \right| \right) + 2 \sin \alpha \cos \alpha = u - \ln |u|,$$

gdzie $u = \sin 2\alpha$ spełnia $e^{-2025} \leq |u| \leq 1$.

Obliczamy pochodną:

$$(u - \ln |u|)' = 1 - \frac{1}{u},$$

co szybko prowadzi do odpowiedzi: na mocy lematu Fermata funkcja $u \mapsto u - \ln |u|$ przyjmuje wartość największą (najmniejszą) w jednym z punktów $u = 1, -1, e^{-2025}, -e^{-2025}$.

Kolokwium nr 2. z 9 stycznia 2025 — rozwiązania wzorcowe

Uwaga: Przedstawione poniżej rozwiązania nie są jedynymi możliwymi rozwiązaniami, za które można było uzyskać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 0.

- Podać definicję różniczki trzeciego rzędu funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ (napisać jak się trzecią różniczkę definiuje, jakie założenia są potrzebne by definicja miała sens, jakim obiektem matematycznym jest trzecia różniczka).
- Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie klasy C^1 oraz dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^2$ przekształcenie $DF(x)$ jest odwracalne. Czy F musi być różnowartościowa?
- Niech $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, będzie klasy C^∞ , zaś $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : F(x) = 0\}$. Przypuśćmy, że dla pewnych $p \in M$ zachodzi $DF(p) = 0$. Czy M może być rozmaitością klasy C^1 ?
- Podać definicję miary zewnętrznej oraz miary. W jaki sposób, dla ustalonej miary zewnętrznej μ^* definiujemy σ -ciało $\mathcal{F}(\mu^*)$ zbiorów, na którym μ^* jest miarą (należy sformułować warunek Carathéodory'ego)?
- Zauważmy, że $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = f(x, y)$. Obliczyć całkę $\int_{[0,1]^2} f \, d\lambda_2$ lub uzasadnić, że nie jest określona.

Uwaga: W punktach (b)–(c) odpowiedź twierdzącą lub przeczącą należy uzasadnić (uzasadnienie nie powinno być dłuższe niż 1–3 zdania).

Rozwiązanie.

a) Aby zdefiniować różniczkę trzeciego rzędu funkcji f w punkcie a musimy założyć, że różniczka drugiego rzędu funkcji f jest określona na pewnym otwartym otoczeniu U punktu a . Zatem funkcja $g(x) = D^2f(x)$ jest dobrze określona dla każdego $x \in U$, a jej przeciwdziedzina są przekształcenia dwuliniowe z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$. Oznaczmy zbiór przekształceń dwuliniowych jako $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Różniczką trzeciego rzędu funkcji f w punkcie a nazywamy (o ile istnieje) różniczkę funkcji g w punkcie a . $Dg(a) = D^3f(a)$ jest przekształceniem liniowym z $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ w $\mathbb{R}$, które utożsamiamy z przekształceniem trójliniowym z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$.

b) Nie musi być. Na analizie I.1 dowodziliśmy, że funkcja $\exp(z)$ z $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ jest okresowa (o okresie $2\pi i$). Można ją zapisać jako funkcję $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Mamy

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix} \quad DF(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $F(x, y) = F(x, y + 2\pi)$, więc F nie jest różnowartościowa, ale $\det DF(x, y) = e^{2x} > 0$, więc $DF(x, y)$ jest odwracalna na całym $\mathbb{R}^2$.

c) Tak, M może być rozmaitością. Na przykład równanie $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ definiuje okrąg jednostkowy, który jest rozmaitością klasy C^∞ , ale dla każdego punktu p należącego do tego okręgu $DF(p) = [0, 0]$.

d) Miarą zewnętrzną określoną na pewnym zbiorze X nazywamy funkcję μ^* ze zbioru potęgowego zbioru X w odcinek $[0, \infty]$ spełniającą następujące warunki:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (monotoniczność) dla dowolnych $A \subset B \subset X$ zachodzi $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

- (iii) (przeliczalna subaddytywność) dla dowolnej przeliczalnej rodziny A_j podzbiorów X miara zewnętrzna sumy (teoriomnogościowej) zbiorów A_j jest mniejsza lub równa sumie miar zewnętrznych zbiorów A_j .

Powiemy że funkcja μ działająca z pewnej rodziny $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru X (zwanej σ -ciałem zbiorów mierzalnych względem miary μ) jest miarą jeśli miara zbioru pustego jest zero oraz μ jest przeliczalnie addytywna, czyli jeśli $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$ są parami rozłączne, to miara sumy zbiorów A_j jest równa sumie miar zbiorów A_j .

Dla danej miary zewnętrznej μ^* zbiory spełniające warunek Carathéodory'ego, czyli takie zbiory $A \subset X$, że dla każdego $Z \subset X$ zachodzi

$$\mu^*(Z) = \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(Z \setminus A),$$

tworzą σ -ciało, zaś μ^* jest miarą na tym σ -ciele.

e) Zauważmy, że f nie jest jednego znaku na $[0, 1]^2$, więc nie możemy od razu zastosować twierdzenia Fubiniego. Określmy $A = [0, 1]^2 \cap \{(x, y) : x > y\}$. Na zbiorze A funkcja f jest dodatnia (oczywiście jest też mierzalna jako funkcja ciągła), więc możemy użyć twierdzenia Fubiniego. Korzystając z tego twierdzenia otrzymujemy

$$\int_A f \, d\lambda_2 = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2x^2} dx \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

Zauważmy, że $f < 0$ na $B = [0, 1]^2 \cap \{(x, y) : x < y\}$, a z symetrii funkcji f wnioskujemy, że całka z f po zbiorze B jest równa $-\infty$. Stąd wniosek, że całka Lebesgue'a z f po $[0, 1]^2$ nie jest określona.

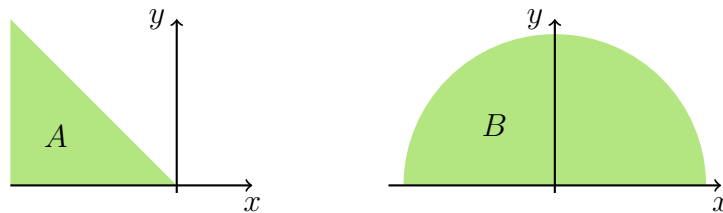
Zadanie 1. Wykazać, że zbiory

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, 0 < y < -x\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$$

są dyfeomorficzne. Należy podać jawny wzór na dyfeomorfizm między zbiorami A, B (lub przedstawić ten dyfeomorfizm jako złożenie kilku dyfeomorfizmów zapisanych jawnymi wzorami).

Rozwiązanie.

Naszkicujmy najpierw rozważane zbiory.



Wersja nr 1:

Zauważmy, że stosując współrzędne biegunowe zbiór A przekształcimy na nieograniczony pas w $\mathbb{R}^2$ zaś zbiór B na prostokąt. Punktu $\{(0, 0)\}$, w którym przekształcenie się „psuje” nie ma ani w A ani w B . Zbiór A będzie opisany (we współrzędnych biegunowych) przez $r \in (0, \infty)$ oraz kąt zmieniający się od $\frac{3\pi}{4}$ do π . Określmy

$$A_1 = (0, +\infty) \times \left(\frac{3\pi}{4}, \pi \right), \quad \Phi_1: A_1 \rightarrow A, \quad \Phi_1(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie Φ_1 jest dyfeomorfizmem A_1 na A (wiemy z ćwiczeń, Φ_1 jest różnowartościowe na A_1 oraz $\det D\Phi_1(r, \varphi) = r > 0$). Podobnie zauważmy, że zbiór B jest półkolem, który we współrzędnych biegunowych opisany jest przez $r \in (0, 1)$ oraz kąt zmieniający się od 0 do π . Zatem

$$B_1 = (0, 1) \times (0, \pi) \quad \Phi_2: B_1 \rightarrow B, \quad \Phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

a Φ_2 jest dyfemorfizmem B_1 na B . Zauważmy, że teraz wystarczy znaleźć dyfemorfizm między A_1 i B_1 . Wystarczy zatem przekształcić $(0, +\infty)$ na $(0, 1)$, zaś $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ na $(0, \pi)$. Wiemy, że

$$(0, \infty) \ni x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctg x \in (0, 1), \quad \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \ni \alpha \mapsto 4\alpha - 3\pi \in (0, \pi).$$

są dyfemorfizmami odpowiednich przedziałów, a zatem

$$\Phi_3: A_1 \rightarrow B_1, \quad \Phi_3(x, \alpha) = \left(\frac{2}{\pi} \arctg x, 4\alpha - 3\pi\right)$$

jest dyfemorfizmem A_1 na B_1 . Składając te dyfemorfizmy oraz ich odwrotności otrzymamy dyfemorfizm A na B :

$$\Phi: A \rightarrow B, \quad \Phi = \Phi_2 \circ \Phi_3 \circ \Phi_1^{-1}.$$

Zadanie 2. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, y^2 + z^2 = 2\}$.

- Wykazać, że M jest mnogością jednowymiarową klasy C^∞ .
- Znaleźć przestrzeń styczną do M w punkcie $(1, 1, 1)$.
- Znaleźć kresy funkcji $f(x, y, z) = \ln(|x|) + yz$ na zbiorze $M \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq e^{2025}\}$.

Rozwiązanie.

a) Określmy $F(x, y, z) = (xyz - 1, x^2 + y^2 - 2)^T$. Zbiór M jest poziomica zerową funkcji F . Wykażemy, że w każdym punkcie $(x, y, z) \in M$ przekształcenie $DF(x, y, z)$ jest epimorfizmem liniowym. Mamy

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 0 & 2y & 2z \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $xyz = 1$, to $x \neq 0$, $y \neq 0$ oraz $z \neq 0$, a zatem wyznacznik minora macierzy $DF(x, y, z)$ złożony z pierwszych dwóch kolumn nie zeruje się. To dowodzi, że dla każdego $(x, y, z) \in M$, $DF(x, y, z)$ jest epimorfizmem, zatem M jest mnogością. Funkcja F jest klasy C^∞ na $\mathbb{R}^3$, więc M też jest klasy C^∞ .

b) Przestrzeń styczna $T_{(1,1,1)}M = \ker DF(1, 1, 1)$, a zatem (wstawiając $(1, 1, 1)$ do wyznaczonego wyżej wzoru DF) są to takie wektory $[r, s, t] \in \mathbb{R}^3$, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies r + s + t = 0, \quad s + t = 0.$$

Łatwo zauważyć, że $r = 0$ zaś $s = -t$. Czyli $T_{(1,1,1)}M = \text{lin}([0, 1, -1])$.

c) Zauważmy, że $y^2 + z^2 \geq 2|y||z|$ (bo $(y - z)^2 \geq 0$), a równość zachodzi dla $|y| = |z|$. Ponieważ na M zachodzi $y^2 + z^2 = 2$, to $|y||z| \leq 1$, czyli $-1 \leq yz \leq 1$. Zauważmy też, że na M mamy $xyz = 1$, czyli $y \neq 0$ oraz $z \neq 0$ oraz $x = \frac{1}{yz}$. Jeśli $0 < yz \leq 1$, to $x \geq 1$, zaś jeśli $-1 \leq yz < 0$, to $x \leq -1$. Stąd wynika, że $\ln(|x|) \geq 0$, zaś $yz \geq -1$. Zatem $f(x, y, z) \geq -1$ na M a minimum jest przyjmowane dla $x = -1$ oraz $yz = -1$ (czyli w punktach $(-1, -1, 1)$ oraz $(-1, 1, -1)$). Pozostaje nam znaleźć maksimum funkcji f na $M \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq e^{2025}\}$. Ponieważ $x = \frac{1}{yz}$, to wystarczy znaleźć maksimum funkcji

$$g(x) = \ln(|x|) + \frac{1}{x} \quad \text{na} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 2, 1 \leq |x| \leq e^{2025}\}.$$

Ponieważ g jest funkcją jednej zmiennej oraz dla $x \neq 0$ mamy $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x - 1)$ czyli $g'(x) < 0$ dla $x < -1$ i $g'(x) > 0$ dla $x > 0$, to g osiąga maksimum dla $x = e^{2025}$ lub dla $x = -e^{2025}$. Łatwo jednak zauważyć, że $g(|x|) > g(-|x|)$. Stąd

$$\inf_M f = -1, \quad \sup_M f = g(e^{2025}) = 2025 + e^{-2025}.$$

Zadanie 3. a) Znaleźć miarę zbioru

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z > 0, x^2 + y^2 < \sqrt{z} < 1\}.$$

b) Niech $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x, 0 < z < xy\}$. Obliczyć

$$\int_E \left(e^{-x^4} - \frac{1}{1+x^8} \right) d\lambda_3(x, y, z).$$

Rozwiązanie.

a) Rozważmy zmienne biegunowe w płaszczyźnie (x, y) . Niech $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$. Oczyszcicie

$$\Phi(r, \alpha, z) = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi(r, \alpha, z) = r$$

jest dyfeomorfizmem $A_1 = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, \alpha \in (0, \pi), 0 < r^2 < \sqrt{z} < 1\}$ na A . Z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy

$$\lambda_3(A) = \int_A d\lambda_3 = \int_{A_1} r d\lambda_3(r, \alpha, z) = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt[4]{z}} r dr \right) dz \right) d\alpha = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{z} dz \right) d\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Mogliśmy użyć twierdzenia Fubiniego, ponieważ funkcja podcałkowa jest mierzalna i nieujemna.

c) Ponieważ funkcja podcałkowa nie jest stałego znaku na E , to nie możemy od razu użyć twierdzenia Fubiniego. Możemy postąpić dwójako: Albo oszacować moduł funkcji podcałkowej (np. przez $\frac{\alpha}{1+x^8}$, dla dostatecznie dużego α), albo rozbić naszą całkę na różnicę dwóch całek (jeśli obie będą nieskończone, to będzie to oznaczać, że całka jest nieokreślona). Ponieważ w ten sposób unikniemy niepotrzebnego szacowania, to tak zrobimy.

$$\int_E \left(e^{-x^4} - \frac{1}{1+x^8} \right) d\lambda_3(x, y, z) = \int_E e^{-x^4} d\lambda_3(x, y, z) - \int_E \frac{1}{1+x^8} d\lambda_3(x, y, z).$$

(Powyższa równość będzie miała sens o ile przynajmniej jedna z całek po prawej stronie będzie skończona.) Ponieważ obie funkcje są funkcjami od x^4 , to ich konkretna postać będzie istotna dopiero na ostatnim etapie obliczeń. Niech więc $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ będzie ciągłą. Policzymy (funkcja jest nieujemna, więc możemy użyć twierdzenia Fubiniego)

$$\int_E f(x^4) d\lambda_3(x, y, z) = \int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} f(x^4) dz \right) dy \right) dx = \int_0^\infty x \left(f(x^4) \int_0^x y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^3 f(x^4) dx.$$

Zauważmy, że podstawienie $t = x^4$, $dt = 4x^3 dx$ sprowadza całkę do $\frac{1}{8} \int_0^\infty f(t) dt$. A zatem

$$\begin{aligned} \int_E e^{-x^4} d\lambda_3(x, y, z) &= \frac{1}{8} \int_0^\infty e^t dt = \frac{1}{8} \\ \int_E \frac{1}{1+x^8} d\lambda_3(x, y, z) &= \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Ponieważ obie całki są skończone, to

$$\int_E \left(e^{-x^4} - \frac{1}{1+x^8} \right) d\lambda_3(x, y, z) = \frac{2-\pi}{16}.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym, ograniczonym, zawierającym punkt $(0, 0)$, funkcja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, funkcja

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/4} f(x, y)$$

jest ograniczona na A oraz a_n jest ciągiem liczbowym zbieżnym do 0. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A a_n f(x, y) d\lambda_2(x, y)$$

lub podać przykład, że ta granica nie musi istnieć.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że dla $(x, y) \neq (0, 0)$, $(x, y) \in A$ mamy $f(x, y) = g(x, y)(x^2 + y^2)^{-3/4}$. Ponieważ g jest ograniczona, to $a_n f(x, y) \rightarrow 0$ dla wszystkich $(x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$. Jeśli uda nam się znaleźć majorantę dla funkcji $a_n f$, to wówczas granica w zadaniu będzie równa 0. Oczywiście, ponieważ $a_n \rightarrow 0$, to $|a_n| \leq M$ dla pewnej stałej $M > 0$, a zatem wystarczy wykazać, że f jest całkowalna na A .

Ponieważ A jest ograniczony, to $\lambda_2(A) < \infty$. Niech B_r będzie kulą otwartą o środku w $(0, 0)$ i promieniu r . Oznaczmy też $M_g = \sup_A |g| < \infty$. Dla wszystkich $(x, y) \in A \setminus B_r$ zachodzi oszacowanie

$$|f(x, y)| = |g(x, y)|(x^2 + y^2)^{-3/4} \leq \frac{M_g}{\sqrt{r^3}}.$$

Stąd mamy (dla dowolnego $r > 0$)

$$\int_{A \setminus B_r} |f| d\lambda_2 \leq \int_{A \setminus B_r} \frac{M_g}{\sqrt{r^3}} d\lambda_2 = \frac{M_g}{\sqrt{r^3}} \lambda_2(A \setminus B_r) \leq \frac{M_g}{\sqrt{r^3}} \lambda_2(A) < \infty.$$

Ponieważ A jest otwarty oraz $(0, 0) \in A$, to istnieje $r > 0$, takie że $B_r \subset A$. Ustalmy to r . Udowodniliśmy, że f jest całkowalna na $A \setminus B_r$. Wykażemy, że f jest całkowalna na B_r , a stąd wnioskujemy całkowalność f na A .

Wykażemy, że $\int_{B_r} |f| d\lambda_2 < \infty$. Funkcja podcałkowa jest nieujemna, więc możemy użyć twierdzenia o zamianie zmiennych i twierdzenia Fubiniego. Niech $E = (0, r) \times (0, 2\pi)$ oraz $\Phi(t, \alpha) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)^T$. Oczywiście Φ jest dyfeomorfizmem E na $\Phi(E)$ oraz $\lambda_2(B_r \setminus \Phi(E)) = 0$. Ponieważ $|\det D\Phi| = t$, to mamy

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |f| d\lambda_2 &= \int_{B_r} \frac{|g(x, y)|}{(x^2 + y^2)^{3/4}} d\lambda_2(x, y) = \int_E \frac{tg(\Phi(t, \alpha))}{t^{3/2}} d\lambda_2(t, \alpha) \leq M_g \int_E \frac{1}{t^{1/2}} d\lambda_2(t, \alpha) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) d\alpha = 4\pi \sqrt{r} < \infty. \end{aligned}$$

Zatem f jest całkowalna na A . Z tego wynika, że ciąg $a_n f$ jest majoryzowany przez $M|f|$, a zatem, z twierdzenia o zbieżności zmajorowanej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A a_n f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_A 0 d\lambda_2(x, y) = 0.$$